

Infos: Formulaire feedback sur les corrigés sur moodle

◇ Liste des devoirs à connaître sur moodle (sera updatée au fur et à mesure du semestre)

◇ Examen blanc: Jeudi 14 novembre
en INF 1, ELA 2, ELG 120, AAC 137 de 10h15 à 12h00

R  :

Série : $(S_n)_{n \geq 0}$ où $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $(a_k)_{k \geq 0}$ est donnée

La série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge si (S_n) converge

La série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge absolument si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ existe

Retour sur l'exercice à résoudre

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^{n+1} j 2^j = n 2^{n+2} + 2$$

Où lire n_0 ?

Exemple 3.42: (i)

$$0 < r < 1, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

$$r \geq 1, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} r^k = +\infty$$

(ii) la série harmonique: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge

(iii) pour $\alpha \geq 0$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$, diverge

pour $\alpha \leq 1$.

Proposition 3.43:

Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ une série convergente. Alors, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

LA RECIPROQUE EST FAUSSE

§ 3.6 Critères de convergence pour les séries.

Théorème 3.45:

Une série qui converge absolument converge.

Théorème 3.46: Critère de comparaison

Soient $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ & $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ deux séries.

(i) Si $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ converge et $\exists K \in \mathbb{N}$

$$\text{tq } \forall k \geq K, |a_k| \leq b_k$$

alors, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge absolument

(et donc converge)

(iii) Si $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ diverge et $\exists K \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \geq K$,

$0 \leq b_k \leq a_k$, alors, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge.

Corollaire 3.47 (Corollaire du critère de comparaison)

Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite et la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Alors,

(i) Si $\exists \alpha > 1$ tq $k^\alpha a_k$ converge, alors, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge absolument (et donc converge)

(ii) Si $\exists \alpha \leq 1$ tq $k^\alpha a_k$ converge vers une limite non-nulle, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge.

Théorème 3.48 (Critère de d'Alembert)

Soit une suite $(a_k)_{k \geq 0}$ tq $\forall k, a_k \neq 0$, et la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

Supposons que la limite $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \ell$

(i) Si $\ell < 1$, la série converge absolument

(ii) Si $\ell > 1$, la série diverge

(iii) Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Théorème 3.49 (Critère de Cauchy, critère de la liusup)

Soit une suite $(a_k)_{k \geq 0}$ et la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Supposons que $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \ell$ existe.

- (i) Si $l < 1$ la série converge absolument
- (ii) Si $l > 1$, la série diverge
- (iii) Si $l = 1$, on ne peut rien dire.

Remarque 3.50

Si $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, alors,

$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, i.e. le "l" du critère de la limsup & d'Alcumbert sont les mêmes si ils existent les deux

Théorème 3.51 : Critère des séries alternées.

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, tq

- (i) $\forall k \geq 0, a_k \cdot a_{k+1} \leq 0$
 - (ii) $\forall k \geq 0, |a_{k+1}| \leq |a_k|$
 - (iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.
- Alors, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

Guide d'utilisation des critères.

Séries alternées : $a_n = (-1)^n \cdot b_n$, $b_n \geq 0$. $\rightarrow$ Critère des séries alternées

Le reste : convergence absolue : vitesse à laquelle $|a_n| \rightarrow 0$

vitesse ? $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = 0$ car $e^n \rightarrow +\infty$ plus vite que n .

Hyp : $|a_n|, |b_n| \rightarrow 0$

si $\frac{|a_n|}{|b_n|} \rightarrow 0$, $|a_n| \rightarrow 0$ strictement plus vite que $|b_n|$

si $\frac{|a_n|}{|b_n|} \rightarrow l > 0$, $|a_n| \rightarrow 0$ à la même vitesse que $|b_n|$

si $\frac{|a_n|}{|b_n|} \rightarrow +\infty$, $|a_n| \rightarrow 0$ strictement plus lentement que $|b_n|$

1- vitesse exponentielle : d'Alembert ou lemsup.

$$a_k = r^k$$

$k!$

$$(x_k)^k$$

2- vitesse polynomiale : corollaire du critère de comp.

$$a_k = \frac{p(k)}{q(k)}$$

$$k^\alpha \cdot a_k = \frac{a_k}{\frac{1}{k^\alpha}}$$

Exemple 3.52 (ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^5 + 2n^3 + 4n}}$

mon $\alpha!$

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^5 + 2n^3 + 4n}} = \frac{n}{n^{5/2}} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^4}}} = \frac{1}{n^{3/2}} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^4}}}$$

Soit $\alpha = 3/2 > 1$, alors, $n^{3/2} \cdot \frac{n+1}{\sqrt{n^5 + 2n^3 + 4n}}$

$$n^{3/2} \cdot \frac{n+1}{\sqrt{n^5 + 2n^4 + 4n}} = n^{3/2} \cdot \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}} \longrightarrow 1.$$

$\Rightarrow$ la série converge absolument

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{14^k}{k^k}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt[k]{\frac{14^k}{k^k}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{14}{k} = 0 < 1 \quad \text{la série converge absolument.}$$

(v) Soit la série harmonique alternée :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad a_k$$

(i) $a_k \cdot a_{k+1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} \underbrace{(-1)^{2k+1}}_{=-1} < 0$

$$(ii) |a_{k+1}| = \left| \frac{(-1)^{k+2}}{k+1} \right| = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} = \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right|$$

$$(iii) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 0 \quad \underline{\text{OK!}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ converge.}$$

Convergence absolute?

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \text{ diverge.}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ we converge pas absolument.}$$

Exemple 3.53 (Séries qui dépendent d'un paramètre)

Si a_n (le terme général) dépend d'un paramètre, la discussion de la convergence devient : pour quels paramètres la série converge ?

$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ converge si et seulement si $r \in]-1, 1[$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(i) Soit la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Pour quels x ça converge ?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|x^n|}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

$\Rightarrow$ la série converge absolument $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$(ii) \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k (t-1)^k$$

d'Alembert: $\lim_{k \rightarrow \infty}$

$$\frac{|2^{k+1} (t-1)^{k+1}|}{|2^k (t-1)^k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2|t-1| = 2|t-1|$$

$$\text{si } 2|t-1| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |t-1| < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < t-1 < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \quad \text{la s\u00e9rie converge absolument.}$$

$$\text{si } 2|t-1| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad t < \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad t > \frac{3}{2} \quad \text{la s\u00e9rie diverge}$$